Prednáška 7

7.1. Fourierova transformácia

Fourierova transformácia (FT), podobne ako iné integrálne transformácie (Laplaceova, Hankelova, Mellinova), má veľké použitie ako v matematike, tak aj vo fyzike. V matematike hlavne pri riešení diferenciálnych rovníc a vo fyzike napríklad v kvantovej mechanike: ak f má význam vlnovej funkcie častice, potom jej FT sa nazýva vlnová funkcia v impulzovej reprezentácii a $|f(\mathbf{x})|^2$, resp. $|\hat{f}(\mathbf{x})|^2$ majú význam hustoty pravdepodobnostného rozloženia súradnice častice resp. jej impulzu. V tejto kapitole budeme ako pravidlo uvažovať komplexné funkcie a k nim komplexne združené funkcie $\overline{f}$ budú definované ako $\overline{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$. Pokiaľ nebude povedané inak, budeme predpokládať, že funkcie sú z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Definícia 7.1.1.

Pre komplexnú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme jej FT predpisom

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = \hat{f} := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\ \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

a opačnú (inverznú) FT predpisom

$$\left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(\xi) = \check{f} := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\ \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka 7.1.2.

Používajú sa aj iné varianty FT, ktoré je možné jednotne charakterizovať:

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = A^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

a

$$\left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(\xi) = B^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\langle \mathbf{x},\xi\rangle} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

kde čísla $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sú zviazané vzťahom $AB = \frac{|k|}{2\pi}$. Okrem prípadu $A = B = 1, k = 2\pi$ sa väčšinou používajú prípady $A = 1, B = \frac{1}{2\pi}, k = 1$ a $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, k = 1$.

Otázka je, kedy platí (inverzný) vzťah $\widecheck{(\hat{f})} = \widehat{(\check{f})} = f$? Ako ukazuje nasledujúci príklad priestor $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nie je na to úplne vhodný.

Príklad 7.1.3.

Nech f je charakteristická funkcia ohraničeného intervalu s koncovými bodmi $a < b$. Potom je

$$\hat{f}(\xi) = \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} b-a, & \text{ak } \ \xi = 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi a\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi b\xi}}{\mathrm{i}2\pi\xi}, & \text{ak } \ \xi \neq 0. \end{cases}.$$

Dá sa ukázať, že $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Špeciálne pre $a = -l,\ b = l,\ l > 0$ je to tzv. sinc funkcia

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2l, & \text{ak } \ \xi = 0, \\ \dfrac{\sin(2\pi l\xi)}{\pi\xi}, & \text{ak } \ \xi \neq 0. \end{cases}.$$

Problém 7.1.4.

Ukážte, že sinc funkcia z predchádzajúceho príkladu naozaj nepatrí do $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (použite odhad $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ pre $x \in [(j + 1/6)\pi, (j + 5/6)\pi],\ j \in \mathbb{Z}$.)

Problém 7.1.5.

Ukážte, že platí

$$\left(\mathcal{F}\mathrm{e}^{-\beta\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\right)(\xi)=\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\frac{-\pi^2\langle\xi,\xi\rangle}{2}},\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Lema 7.1.6.

Ak je $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ párna (nepárna) v premennej x_j, potom je jej FT párna (nepárna) v premennej ξ_j. Špeciálne pre $n=1$ je

$$(\mathcal{F}f)(\xi)=\begin{cases}2A\displaystyle\int_0^\infty\cos(kx\xi)f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{ak } f \text{ je párna,}\\ -2\mathrm{i}A\displaystyle\int_0^\infty\sin(kx\xi)f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{ak } f \text{ je nepárna.}\end{cases}.$$

Lema 7.1.7.

Ak je $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ radiálna, tj. $f(\mathbf{x})=\phi(\|\mathbf{x}\|)$, je taká aj jej FT a dá sa vyjadriť pomocou jednorozmerného integrálu. Pre $n=3$ má tvar

$$\hat{f}(\xi)=\frac{2}{\|\xi\|}\int_0^\infty\phi(r)r\sin(2\pi r\|\xi\|)\,\mathrm{d}r,\quad \xi\neq 0.$$

(pre $n\neq 3$ obsahuje integrand tzv. Besselove funkcie)

Poznámka 7.1.8.

FT funkcie $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ odpovedá Fourierovým koeficientom l–periodickej funkcie podľa systému $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{l}x}$, $n\in\mathbb{N}$ pri rozklade funkcie do Fourierovho radu (formálne pre $l\to\infty$). Pre periodickú funkciu nám stačilo brať iba frekvencie $\frac{2\pi n}{l}$, $n\in\mathbb{N}$, zatiaľ čo pre FT musíme brať všetky $k\xi$, $\xi\in\mathbb{R}$ a rad nahradiť integrálom.

Veta 7.1.9 (Základné vlastnosti FT).

1. $\check{f}(\xi) = (B/A)^n\, \hat{f}(-\xi)$
2. $\overline{\check{f}(\xi)} = (B/A)^n\, \hat{\overline{f}}(-\xi)$
3. $\check{\overline{f}}(\xi) = (B/A)^n\, \overline{\hat{f}(-\xi)}$
4. $\widehat{f(\mathbf{x}-\mathbf{z})}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\langle \xi,\mathbf{z}\rangle}\hat{f}(\xi),\ \mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$
5. $\hat{f}(\xi-\mathbf{z}) = \widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle} f(\mathbf{x})}(\xi),\ \mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$
6. $\widehat{f(\varepsilon\mathbf{x})}(\xi) = |\varepsilon|^{-n}\hat{f}(\xi/\varepsilon),\ \varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Definícia 7.1.10.

Multiindex $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ nazývame usporiadanú n-ticu čísel $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1,2,\dots,n$. Rádom (stupňom) multiindexu α nazývame číslo $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Pre funkciu n–reálnych premenných $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ a multiindex α znamená $f^{(\alpha)}$ deriváciu funkcie f rádu $|\alpha|$, pričom sa derivuje α_j–krát podľa premennej x_j, $j = 1,\dots,n$ s kovenciou, že pre $|\alpha| = 0$ ide o samotnú funkciu f. Taktiež definujeme mocninu $\mathbf{x}^\alpha$ ako $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ s konvenciou $z^0 = 1$ pre $z\in\mathbb{R}$.

Veta 7.1.11.

$\mathcal{F}$ aj $\mathcal{F}^{-1}$ sú spojité lineárne zobrazenia $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a pre $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ platí

1. $\left\|\hat{f}\right\|_{C_b} \le |A|^n\, \|f\|_{\mathcal{L}^1}\,,\quad \left\|\check{f}\right\|_{C_b} \le |B|^n\, \|f\|_{\mathcal{L}^1}$
2. $\lim\limits_{\|\xi\|\to\infty} \hat{f}(\xi) = \lim\limits_{\|\xi\|\to\infty} \check{f}(\xi) = 0$
3. $\hat{f}, \check{f}$ sú rovnomerne spojité na $\mathbb{R}^n$

Veta 7.1.12.

Pre $f,g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g\,\mathrm{d}\mathbf{x},\quad \int_{\mathbb{R}^n} f\check{g}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}g\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Veta 7.1.13 (Vzťah k derivácii a násobeniu)**.**

(I) Nech $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ a $f^{(m)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pre $|m| \leq k$. Potom pre $m \leq k$

$$\widehat{f^{(m)}}(\xi) = (\mathrm{i}k\xi)^m \hat{f}(\xi), \quad |(k\xi)^m| \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq |A|^n \left\|f^{(m)}\right\|_{\mathcal{L}^1}$$

pre $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(II) Nech $f,\ \mathbf{x}^m f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pre $|m| \leq k$. Potom $\hat{f}^{(i)} \in C_b(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, k$ pre $|m| \leq k$ a

$$\hat{f}^{(m)}(\xi) = (-\mathrm{i}\widehat{k\xi)^m f}(\mathbf{x})(\xi), \quad \left|\hat{f}^{(m)}(\xi)\right| \leq |A|^n \, \|(k\mathbf{x})^m f\|_{\mathcal{L}^1}$$

pre $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Príklad 7.1.14.

Riešme Airyho rovnicu $y'' - xy = 0$. Platí $\mathcal{F}\{y'' - xy\} = 0$ a teda máme ODR $-\xi^2\hat{y} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{y} = 0$. Z toho je $\hat{y} = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^3/3}$ a tak z inverzie

$$y(x) = \frac{c}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x + \xi^3/3)} \,\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(\xi x + \xi^3/3) \,\mathrm{d}\xi$$

Veta 7.1.15 (O FT konvolúcie)**.**

Nech $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, potom platí

$$(\mathcal{F} f * g)(\xi) = (1/A)^n (\mathcal{F} f)(\xi) \cdot (\mathcal{F} g)(\xi)$$

a

$$\left(\mathcal{F}^{-1} f * g\right)(\xi) = (1/B)^n \left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(\xi) \cdot \left(\mathcal{F}^{-1} g\right)(\xi).$$

Nedá sa ľahko charakterizovať priestor Fourierových obrazov všetkých funkcií z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ a naopak veľa rozumných funkcií nie je Fourierovým obrazom žiadnej funkcie z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zavedieme si preto priestor, ktorý nie je jednoducho popísateľný. Bude to však podpriestor priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, ktorý FT zobrazuje proste na seba a inverziou k nej bude inverzná FT. Tento priestor hraje významnú úlohu v teórii distribúcií (akési zovšeobecnenia funkcií ich derivácií).

Ide vlastne o priestor rýchlo klesajúcich funkcií a ich derivácií ("v nekonečne") - $\mathcal{S}$. Z istého dôvodu sa nazýva aj priestor testovacích funkcií.

Schwartzov priestor:

Označme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ množinu všetkých $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takých, že pre každé dva multiindexy α, β platí

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha f^{(\beta)}(\mathbf{x})| := \|f\|_{\alpha\beta} < \infty.$$

Konvergenciu zavádzame predpisom $f_n \to f$ v $\mathcal{S}$ $\Leftrightarrow x^\alpha f_n^{(\beta)}(\mathbf{x}) \rightrightarrows x^\alpha f^{(\beta)}(\mathbf{x})$ v $\mathbb{R}^n$ pre každé dva multiindexy α, β, keďže je to ekvivalentné konvergencii v norme $\|f\|_{\alpha\beta}$.

Príklad 7.1.16.

Typický príklad funkcie z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je funkcia $\mathrm{e}^{-\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Príkladom funkcie z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je funkcia

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}}, & \text{ak } \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle < 1, \\ 0, & \text{ak } \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq 1. \end{cases}.$$

Zrejme platí, že ak $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, potom je rovnomerne spojitá na $\mathbb{R}$.

Veta 7.1.17 (O inverzii)**.**

$\mathcal{F}$ aj $\mathcal{F}^{-1}$ zobrazujú prosto $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$ a sú navzájom k sebe inverzné, tj.

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1} f\right) = f, \ f \in \mathcal{S}.$$

Pomocou predchádzajúcej vety a vety o FT konvolúcie dostaneme nasledujúcu vetu o FT súčinu dvoch funkcií zo Schwartzovho priestoru.

Veta 7.1.18 (O FT súčinu).

Nech $f, g \in \mathcal{S}$, potom platí

$$(\mathcal{F} f g)(\xi) = B^n (\mathcal{F} f)(\xi) * (\mathcal{F} g)(\xi)$$

a

$$\left(\mathcal{F}^{-1} f g\right)(\xi) = A^n \left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(\xi) * \left(\mathcal{F}^{-1} g\right)(\xi) .$$

Ešte si uvedieme vetu, ktorá zovšeobecňuje vetu o inverzii.

Veta 7.1.19.

Nech $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, potom platí

$$\mathcal{F}^{-1} (\mathcal{F} f) = \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1} f\right) = f \text{ s.v. na } \mathbb{R}^n.$$

Dôsledok 7.1.20.

Ak je $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ a $\hat{f} = 0$ s.v. na $\mathbb{R}^n$, potom je $f = 0$ s.v. na $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ sú teda na $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ prosté zobrazenia.

Už vieme, že funkcie z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ nepatria do $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Preto vo všeobecnosti funkcie z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ nemajú FT v zmysle našej definície. Zavedieme si novú definíciu, ktorá pre funkcie z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ bude dávať to isté ako pôvodná definícia a navyše bude ”nová” FT zobrazovať $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ prosto na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Základom pre túto definíciu je nasledujúca rovnosť.

Veta 7.1.21 (Parsevalova rovnosť).

Pre $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = (B/A)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F} f)(\xi)\,\overline{(\mathcal{F} g)(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\overline{g}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = (A/B)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(\xi)\,\overline{(\mathcal{F}^{-1} g)(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Keďže je $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hustá v $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ je možné rozšíriť Fourierov operátor spojitým spôsobom z $\mathcal{S}$ na $\mathcal{L}^2$ takto: pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ zoberme postupnosť $f_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ takú, že $f_n \to f$ v $\mathcal{L}^2$. Z predchádzajúcej vety vieme, že postupnosť $\mathcal{F} f_n$ je cauchyovská v $\mathcal{L}^2$. Ale tento priestor je úplný a teda postupnosť $\mathcal{F} f_n$ konverguje ne nejakému $\phi \in \mathcal{L}^2$. Otázka je, či tento prvok závisí na zvolenej postupnosti f_n. Odpoveď je nie, lebo ak by iná postupnosť $\tilde{f}_n$ kovergovala k f, potom k f konverguje aj postupnosť $f_1, \tilde{f}_1, f_2, \tilde{f}_2, \ldots$ a príslušná postupnosť FT k nejakému $\tilde{\phi}$. Ale potom aj podpostupnosti z nej vybrané musi konvergovať k $\tilde{\phi}$ a teda musí byť $\tilde{\phi} = \phi$. Podobne je to v prípade inverznej FT. Teraz je jasné, že nasledujúca definícia je korektná, pričom všetky limity sú myslené v $\mathcal{L}^2$ norme.

Definícia 7.1.22.

Pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ definujeme

$$\mathcal{F} f := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F} f_n, \quad \mathcal{F}^{-1} f := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{-1} f_n,$$

kde $f_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Už sme spomínali, že platí:

Veta 7.1.23.

Pre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ obe definície dávajú s.v. na $\mathbb{R}^n$ to isté.

Dôležitým výsledkom je nájdenie ďalšej množiny, ktorú FT (s pozmenenou definíciou) zobrazuje proste na seba. V teórii distribúcií existuje ešte jedna - množina tzv. temperovaných distribúcií.

Veta 7.1.24.

FT a inverzná FT z definície 7.1.22 sú prosté, spojité lineárne zobrazenia z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, pričom sú navzájom k sebe inverzné. Navyše pre $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ platí Parsevalova rovnosť

$$(B/A)^n \langle \mathcal{F} f, \mathcal{F} g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = (A/B)^n \left\langle \mathcal{F}^{-1} f, \mathcal{F}^{-1} g \right\rangle_{\mathcal{L}^2}.$$

Dôsledok 7.1.25.

Pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ je

$$\mathcal{F} f = \lim_{N \to \infty} A^n \int_{\|\mathbf{x}\| \leq N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$